

Méthodes mathématiques pour la physique

session 2

17/06/2009

durée de l'examen: 2h

1. [7 points] L'oscillateur anharmonique en dimension 1 est décrit par l'équation de Schrödinger stationnaire

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda x^2 - x^4 + E \right) \psi(x) = 0,$$

où E note l'énergie et λ est un paramètre réel. Décrire les comportements asymptotiques possibles des solutions de cette équation (a) lorsque $x \rightarrow \pm\infty$ et (b) lorsque $x \rightarrow 0$.

2. [7 points] Les fonctions de Bessel de 1ère espèce sont définies par

$$J_\nu(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (r/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}.$$

Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir \cos \varphi} d\varphi = J_0(r).$$

3. [3 points] Donner la forme explicite de l'harmonique sphérique $Y_3^0(\theta, \varphi)$.
4. [6 points] Montrer que les polynômes de Legendre vérifient la relation

$$P'_{\ell+1}(z) - zP'_\ell(z) = (\ell + 1)P_\ell(z).$$

Indication: utiliser la formule de Rodrigues.